Osnove digitalnih telekomunikacija

Prof.dr Igor Radusinović
igorr@ac.me
mr Slavica Tomović
slavicat@ac.me

O čemu se radi?

Kurs Osnove digitalnih telekomunikacija nudi savladavanje principa na kojima počivaju digitalne telekomunikacije kroz:

- Opisivanje koraka u postupku digitalizacije analognog signala
- Razlikovanje tipova impulsnih modulacija i definisanja njihovih karakteristika
- Upoređivanje osnovnih karakteristika impulsno kodne modulacije, delta modulacije, adaptivne delta i diferencijalne impulsno kodne modulacije.
- Objašnjavanja principa realizacije vremenskog multipleksa i definisanja parametara E1 i T1 multipleksnih sistema
- Definisanja Nyquist-ovih kriterijuma za prenos digitalnih signala bez intersimbolske interferencije (ISI), kao i opisivanja rješenja za smanjenje nivoa ISI

O čemu se radi (nastavak)?

Kurs Osnove digitalnih telekomunikacija nudi savladavanje principa na kojima počivaju digitalne telekomunikacije kroz:

- Analitičko ocjenivanje kvaliteta prenosa digitalnih signala sa stanovišta vjerovatnoće greške po bitu (BER)
- Definisanje karakteristike podešenog filtra i načina njegove realizacije
- Objašnjenje najbitnijih tipova digitalnih modulacionih postupaka, opisivanje njihovih karakteristika i analitičko evaluiranje performansi u zavisnosti od tipa primijenjenih prijemnika

Ciljevi

- Dostići početno znanje iz digitalnih telekomunikacija
- Stvaranje uslova za aktivno učešće polaznika u budućem razvoju telekomunikacija i društva u cjelini

Zašto je ova oblast interesantna?

Digitalne telekomunikacije su:

- Relevantne jer imaju uticaj na čitavo društvo
- Interdisciplinarna oblast u kojoj se preplići sve oblasti elektrotehnike
- Veoma popularna u nauci i inovacijama
- Oblast sa velikim potencijalom za dalji razvoj
- Bogata literatura i mnoštvo testnih okruženja

Informacije o kursu

- Kome je namijenjen kurs?
  - Studentima osnovnih studija smjera Elektronika, telekomunikacije i računari
- Šta je poželjno znati od ranije?
  - Osnove analognih telekomunikacija, vjerovatnoća, linearni sistemi
- Materijali kursa:
  - Prezentacije urađene od strane predavača
  - „Osnove telekomunikacija“, Ilija Stojanović
  - “Principles of Digital Communication: A Top-Down Approach”, Bixio Rimoldi, Cambridge University Press, 2016
  - Introduction to Digital Communications, Ali Grami, Elsevier, 2016
  - Principles of Digital Communications I, Robert Gallager, Course materials, Massachusetts Institute of Technology.
  - WWW
  - Zabilješke sa predavanja

Informacije o kursu (više)

- Način polaganja:

Rad	broj	% ocjene
Pitalice	5	10%
Kolokvijum	1	45%
• Laboratorija		(10%)
• Pismeni		(10%)
• Usmeni		(25%)
Završni ispit	1	45%
• Laboratorija		(10%)
• Pismeni		(10%)
• Usmeni		(25%)
Bonus		do 10%

Pregled kursa:

Pripremna nedjelja	Priprema i upis semestra
I nedjelja	Diskretizacija kontinualnih signala. Teorema o odabiranju.
II nedjelja	Neravnomjerna kvantizacija. Kompresija.
III nedjelja	IAM. ITM. IPM.
IV nedjelja	IKM.
V nedjelja	Delta modulacija. Adaptivna delta modulacija. Diferencijalna IKM.
VI nedjelja	Prenos digitalnih signala u osnovnom opsegu učestanosti. (ISI).
VII nedjelja	Prenos bez ISI u realnim sistemima. I Najkvistov kriterijum.
VIII nedjelja	KOLOKVIJUM
IX nedjelja	II Najkvistov kriterijum. Dijagram oka. Transferzalni filtar
X nedjelja	Uticaj slučajnog šuma na prenos dig. signala. Optimizacija prenosnog sistema.
XI nedjelja	Prenos digitalnih signala modulisanim nosiocem. ASK. QAM.
XII nedjelja	POPRAVNI KOLOKVIJUM
XIII nedjelja	FSK
XIV nedjelja	PSK
XV nedjelja	Uporedjenje različitih modulacionih postupaka sa stanovišta vjerovatnoće greške.
XVI nedjelja	Završni ispit
Završna nedjelja	Ovjera semestra i upis ocjena.
XVIII-XXI nedjelja	Dopunska nastava i popravni ispitni rok.

Pregled kursa:

Uvod

- Značaj digitalnih telekomunikacija
- Model digitalnog telekomunikacionog sistema

Pregled kursa:

Diskretizacija kontinualnih signala

- po vremenu (odabiranje),
- po trenutnim vrijednostima (kvantizacija)

Pregled kursa:

Impulsne modulacije

- Impulsna amplitudska modulacija
- Impulsna modulacija po trajanju
- Impulsna položajna modulacija
- Impulsna kodna modulacija
- Delta modulacija
- Adaptivna delta modulacija
- Diferencijalna impulsno kodna modulacija

Pregled kursa:

Električno predstavljanje diskretnih poruka i oblici digitalnih signala

Pregled kursa:

Prenos digitalnih signala u osnovnom opsegu

- ISI
- Uslovi prenosa bez ISI
- Nyquistovi kriterijumi
- Uticaj slučajnog šuma
- Optimizacija sistema za prenos

Pregled kursa:

Prenos digitalnih signala modulisanim nosiocem

- ASK
- FSK
- PSK (B-PSK, DPSK i QPSK)
- QAM

Pregled kursa:

Upoređenje sistema za prenos digitalnih signala

Laboratorijske vježbe

I. TEOREMA O ODABIRANJU I MULTIPLEKS SA VREMENSKOM RASPODJELOM KANALA

II. IMPULSNO KODNA MODULACIJA

III. DIJAGRAM OKA

IV. DIGITALNE MODULACIJE

Pitanja?

Trendovi u telekomunikacijama (2019):

- Mašinsko učenje (Machine learning)
- THz opseg
- Post *smartphone* era
- LTE
- Telekom operatori i IT kompanije konvergiraju
- Sigurnost i privatnost korisnika
- Massive MIMO
- Bezbjedonosni problemi
- Početak priče o 6G

https://www.comsoc.org/publications/ctn/nine-communications-technology-trends-2019

Top 13 traženih ICT vještina u 2018 (Forbs):

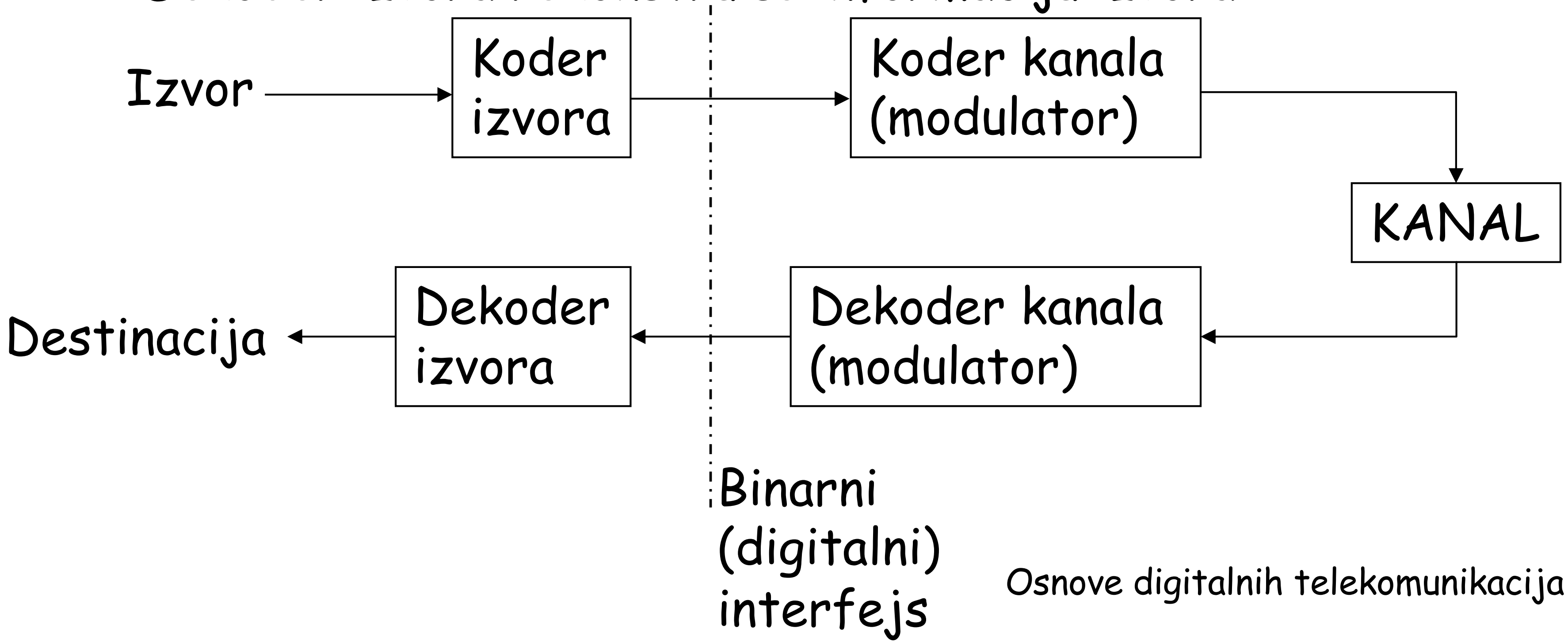
- Iskustvo sa AI (*Artificial Inteligence*)
- Vještine da razvija AR (*Augumented Reality*) aplikacija
- *Data Science* talenat
- Razvoj mobilnih aplikacija
- *Cyber* zaštita
- Talenat za *Cloud* bazirani SaaS
- Mogućnost prilagođavanja novim tehnologijama
- Kodiranje
- Primjena mašinskog učenja
- Programiranje
- Analitika
- Timski rad i komunikacija
- Digitalna transformacija

Uvod:

- Telekomunikacije su mjera civilizovanosti jednog društva
- Industrija digitalnih telekomunikacija je jedna od nabrže rastućih i najperspektivnijih industrija
- Digitalne telekomunikacije imaju snažan uticaj na društvo
- Teorijsku osnovu digitalnih telekomunikacija predstavlja teorija informacija koju je 1948. godine razvio *Claude Shannon*
- Od 1970 ova teorija počinje intenzivno da se implementira u praksi (raspoloživi kadar, mogućnost implementacije,…)
- Dvije ključne ideje:
    - Informacije (slika ,video, tekst, govor, …) se predstavljaju u formi binarnih sekvenci
    - Komunikacioni sistem prvo konvertuje informaciju u binarnu sekvencu, a zatim nju konvertuje u oblik koji je pogodan za prenos medijumom za prijenos (koaksijalni kabal, optičko vlakno, radio kanal, bakarna upredena parica, …)

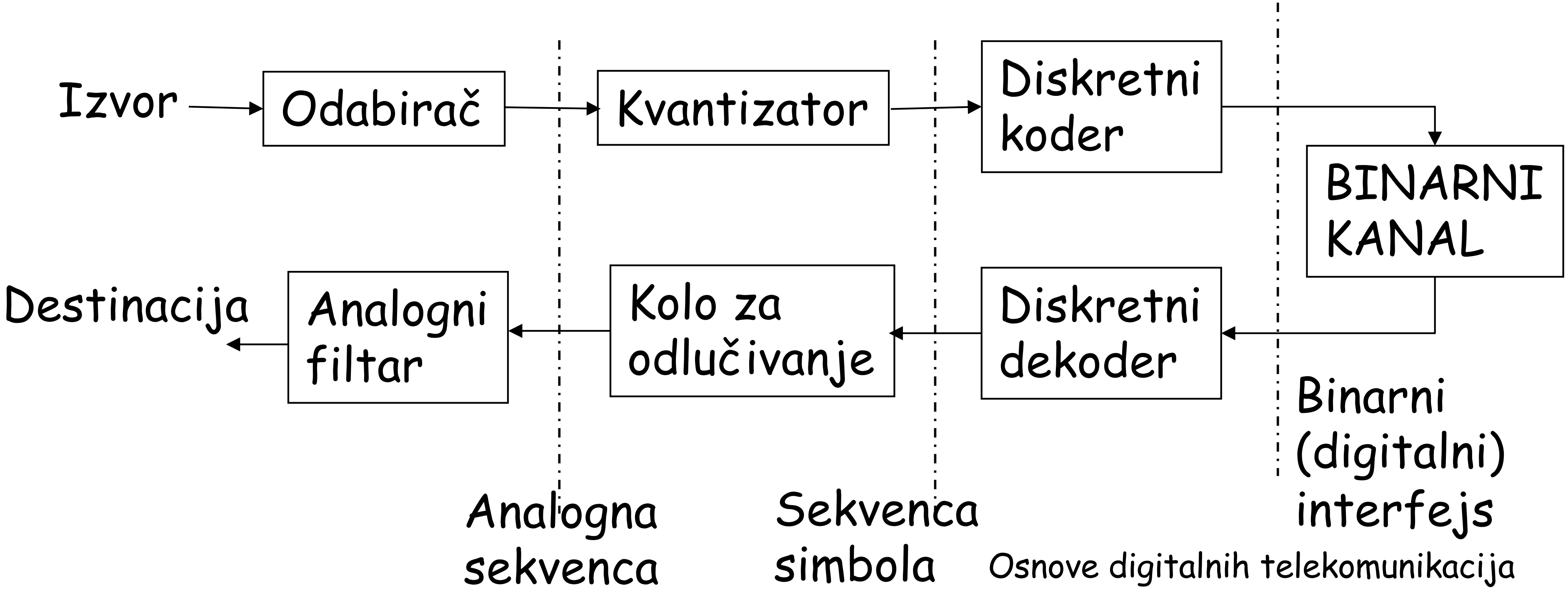
Digitalni telekomunikacioni sistem

- Telekomunikacioni sistemi koji koriste digitalnu sekvencu između izvora i kanala
- Koder izvora konvertuje informaciju koja dolazi od izvora u binarnu sekvencu, dok koder kanala (modulator) obrađuje digitalnu sekvencu u cilju njenog prenosa kanalom.
- Dekoder kanala (demodulator) rekonstruiše binarnu sekvencu
- Dekoder izvora rekonstruiše informaciju izvora

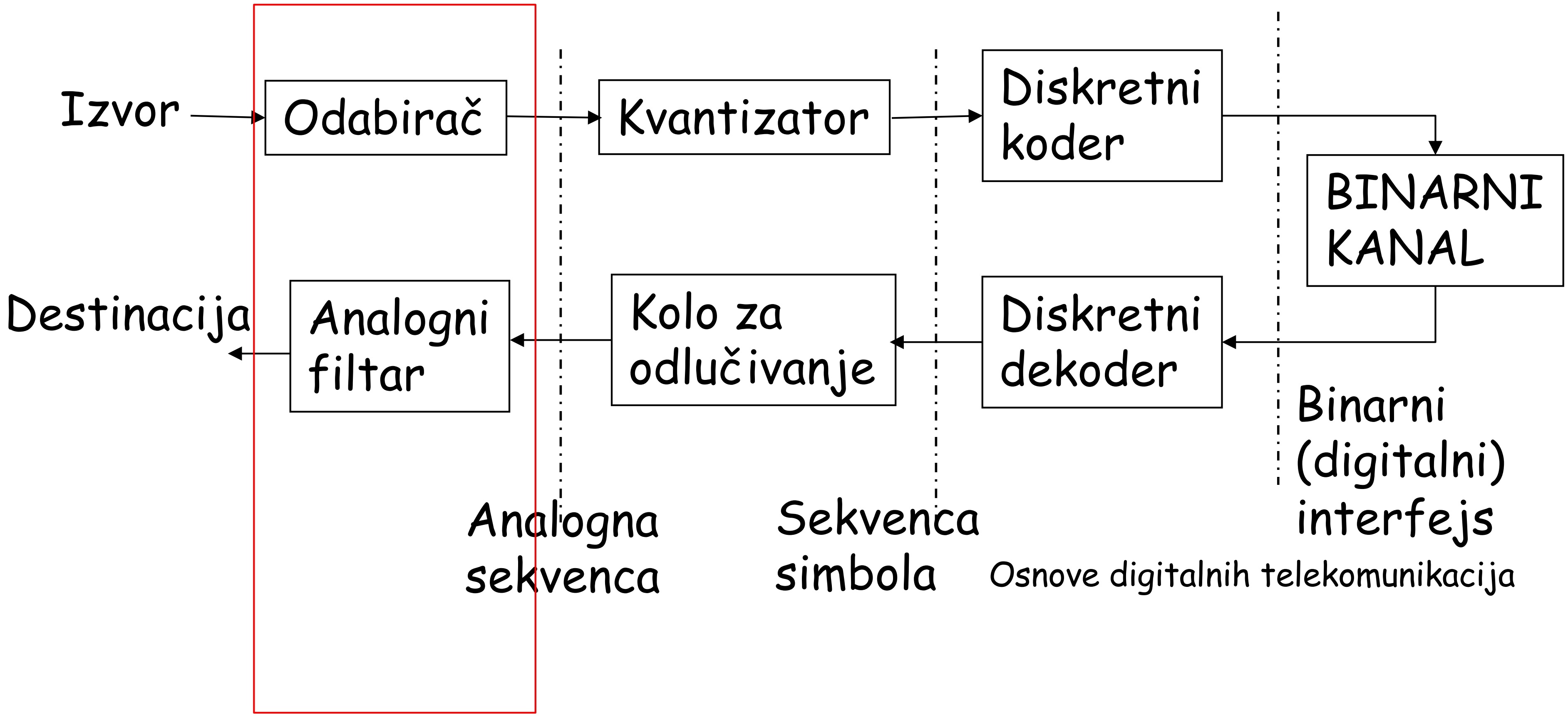


Digitalni telekomunikacioni sistem (nastavak)

- Talasna forma koja nosi informaciju od izvora se konvertuje u povorku odbiraka
- Kvantizator odbirke konvertuje u simbole
- Diskretni koder simbole konvertuje u oblik pogodan za prenos kanalom
- Na prijemnoj strani se obavljaju suprotni postupci



Diskretizacija kontinualnog signala po vremenu (zaključak)



Osnove digitalnih telekomunikacija 1-22

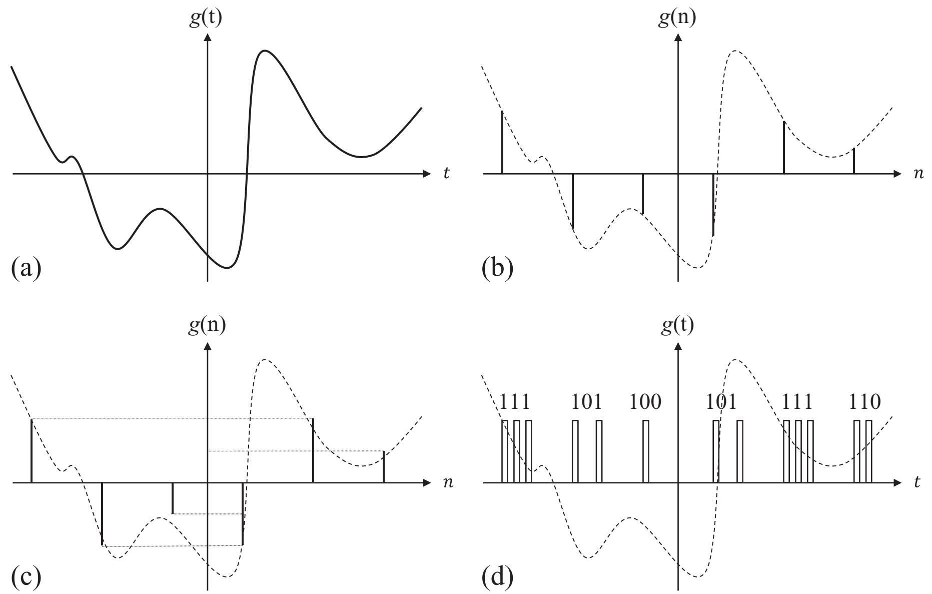
Diskretizacija kontinualnih signala

Poruke i signali u koje se one transformišu uslovno se dijele na dvije grupe:

- kontinualne i
- diskretne.

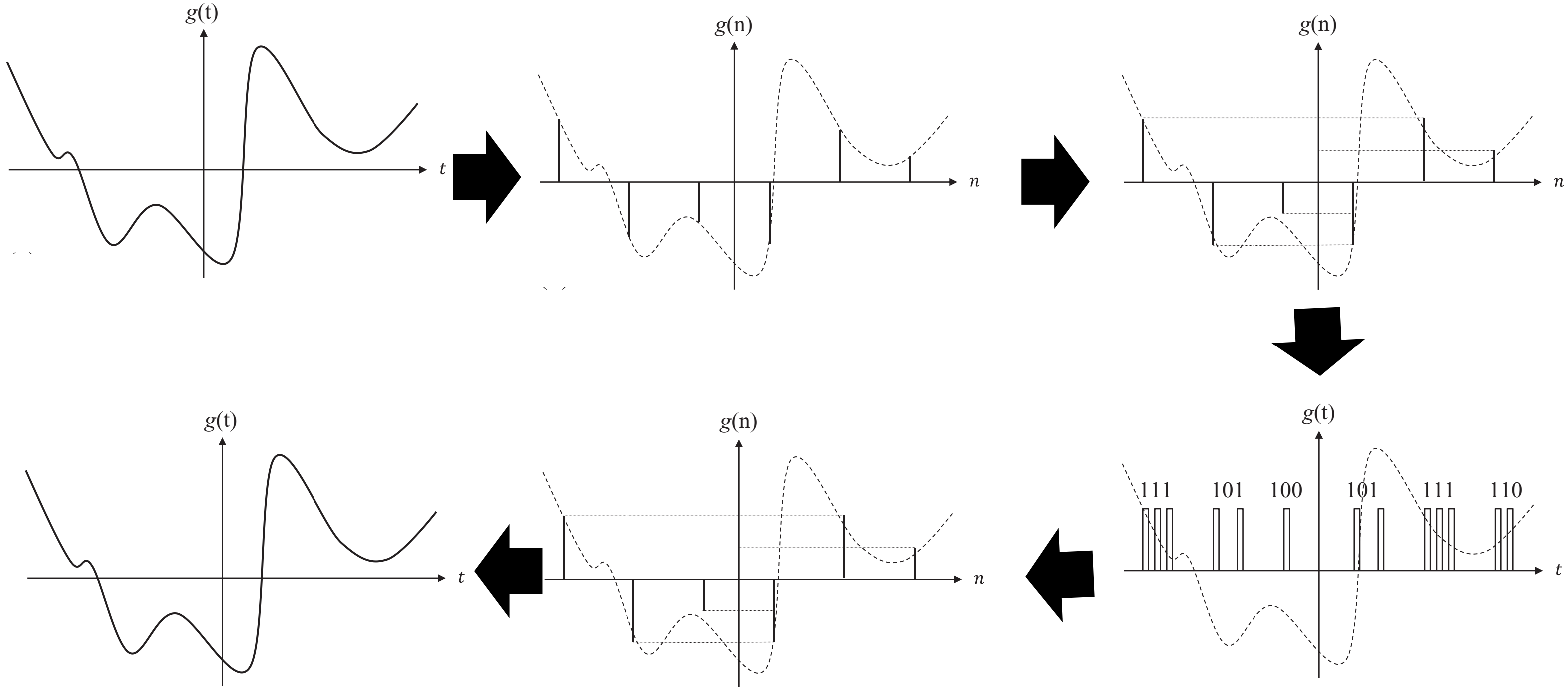
Shodno ovoj podjeli postoje i dvije vrste prenosa:

- analogni i
- digitalni prenos.



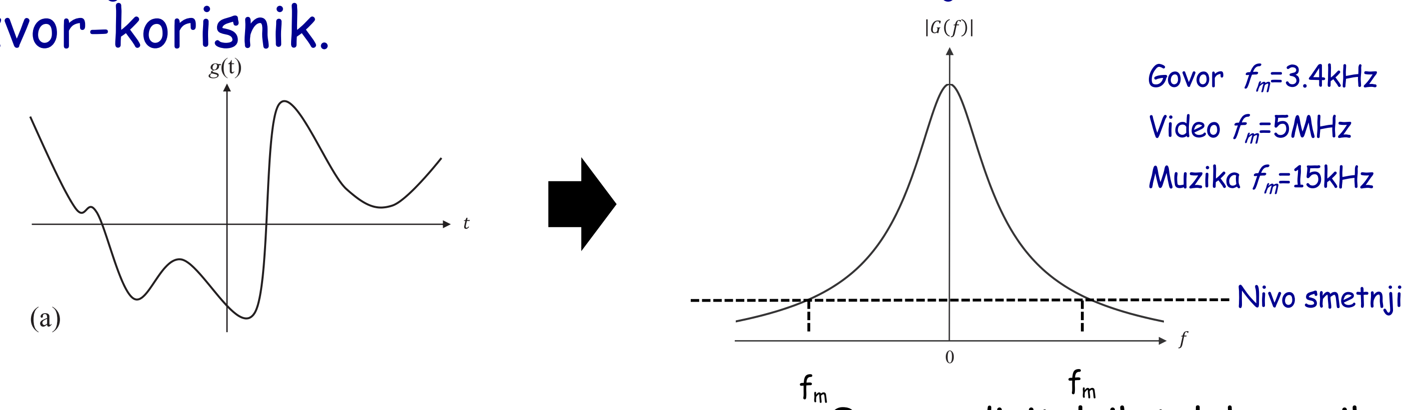
Diskretizacija kontinualnih signala (nastavak)

Harmonijskom analizom funkcija koje predstavljaju kontinualne signale može se pokazati da ih je moguće diskretizovati, a da se pri tome ne promijene osobine koje imaju kao nosioci poruka. Drugim riječima, to znači da postoji principijelna mogućnost da se kontinualne poruke prenose u vidu diskretnih signala.



Diskretizacija kontinualnih signala (nastavak)

- Realne kontinualne poruke predstavljaju slučajne procese.
- Takvi su i odgovarajući signali.
- Kada se sprovede statistička analiza ovakvih signala, dolazi se do zaključka da je osnovni i glavni dio njihovog spektra koncentrisan u nekom konačnom opsegu učestanosti.
- To znači da iznad neke učestanosti f_m, spektralna gustina amplituda ovakvih signala postaje toliko mala da može da bude maskirana uvijek prisutnim bijelim Gausovom šumom. Taj dio spektra nema smisla prenositi.
- U suštini, spektar signala koji predstavlja realne poruke ograničen je u realnim uslovima frekvencijskim karakteristikama para izvor-korisnik.



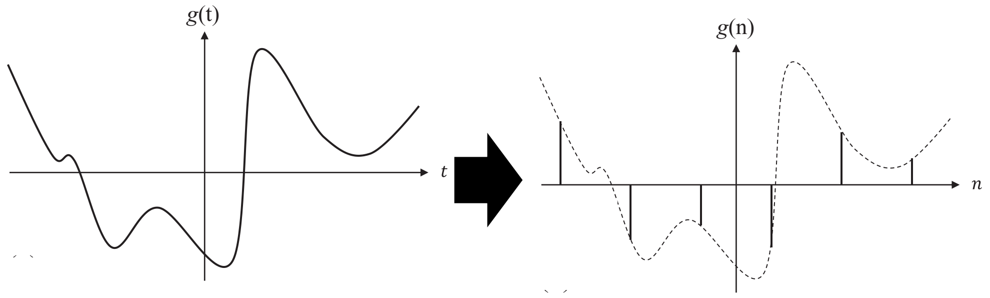
Govor f_m=3.4kHz

Video f_m=5MHz

Muzika f_m=15kHz

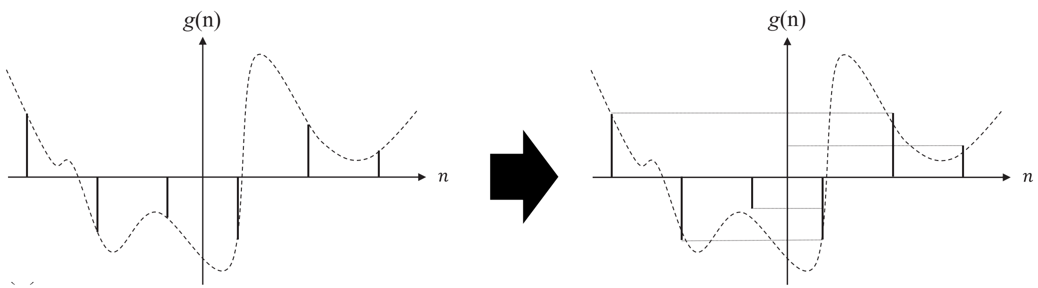
Diskretizacija kontinualnih signala po vremenu

- Teorema o odabiranju (Koteljnikova teorema)
  - Postoje uslovi pri kojima je moguće kontinualni signal čiji je spektar strogo ograničen nekom učestanošću f_m predstaviti njegovim vrijednostima uzetim u diskretnim trenucima vremena.
- Umjesto da signal ima sve moguće vrijednosti iz nekog opsega vrijednosti u bilo kojem trenutku on ima sve moguće vrijednosti iz opsega vrijednosti ali u tačno definisnaim trenucima
- Odabiranje



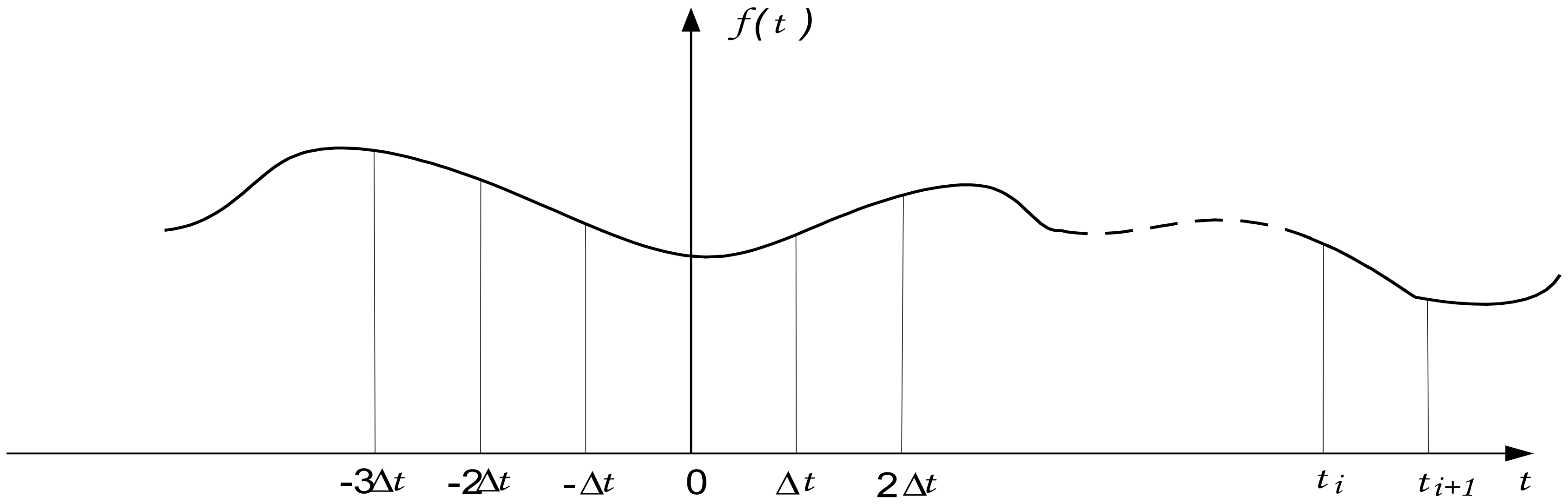
Diskretizacija kontinualnih signala po trenutnim vrijednostima

- Umjesto da signal ima sve moguće vrijednosti iz nekog opsega vrijednosti u tačno definisanim trenucima, signal ima vrijednosti iz konačnog skupa vrijednosti u tačno definisam trenucima
- Kvantizacija



Teorema o odabiranju

Ako kontinualni signal f(t) ima spektar koji se nalazi u opsegu učestanosti od 0 do f_m, onda je taj signal u potpunosti definisan svojim trenutnim vrijednostima, uzetim u ekvidistantnim tačkama medjusobnog rastojanja $\Delta t = t_{i+1} - t_i = (1/2f_m)$. Za proizvoljni kontinualni signal f(t), ovaj skup odabranih vrijednosti je ilustrovan na slici:



Interval Δt je *<u>period odabiranja</u>*. Vrijednosti signala u trenucima nΔt (n cio broj) se zovu odbircima signala *f(t)*.

Teorema o odabiranju (dokaz)

Kako je f(t) kontinualna funkcija koja predstavlja kontinualni signal čiji je spektar ograničen učestanošću f_m, Fourierova transformacija ovog signala je:

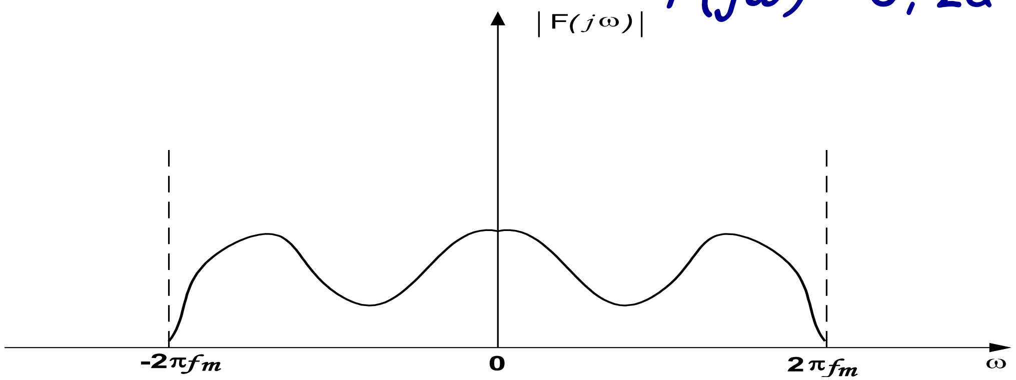
$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Signal se može odrediti kao inverzna Fourierova transformacija funkcije F(jω):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

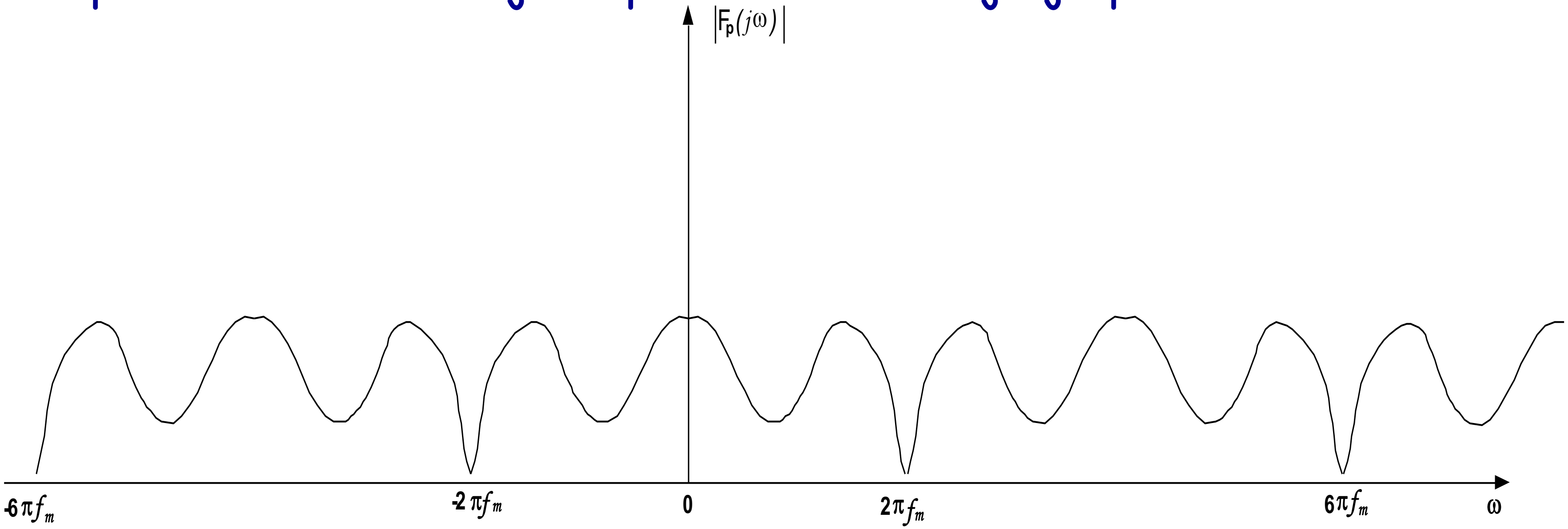
Shodno učinjenoj pretpostavci, spektar ovog signala je ograničen učestanošću f_m, tako da je:

$F(j\omega) = 0$, za $|\omega| > 2\pi f_m$



Teorema o odabiranju (dokaz)

Kreirajmo pomoćnu funkciju $F_P(j\omega)$ koja predstavlja periodično ponavljanje funkcije $F(j\omega)$ sa periodom $4\pi f_m$. Spektralna gustina amplituda ovako dobijene pomoćne funkcije je prikazana na slici:



Kako je funkcija $F_P(j\omega)$ periodična, ona se može razviti u Fourierov red:

$$F_p(j\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\frac{1}{2f_m}\omega}$$

$$t \longrightarrow \omega$$

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T} \longrightarrow \frac{2\pi}{4\pi f_m}=\frac{1}{2f_m}$$

Teorema o odabiranju (dokaz)

Saglasno definiciji Furijeove transformacije kompleksni spektar F_n funkcije $F_P(j\omega)$ će biti:

$$F_n = \frac{1}{4\pi f_m} \int_{-2\pi f_m}^{2\pi f_m} F_p(j\omega) e^{-jn\frac{1}{2f_m}\omega} d\omega$$

Na osnovu uvedene pretpostavke: $F(j\omega) = 0$ izvan intervala $(-2\pi f_m, 2\pi f_m)$, dok je $F(j\omega) = F_P(j\omega)$ u intervalu $(-2\pi f_m, 2\pi f_m)$. To znači da izraz za signal ograničenog spektra f(t)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

postaje :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi f_m}^{2\pi f_m} F_p(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Teorema o odabiranju (dokaz)

Ako sada pronađemo vrijednost ovog signala u trenucima

$$t = t_n = -\frac{n}{2f_m}$$

gdje je

$$n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots,$$

dobijamo

$$f\left(-\frac{n}{2f_m}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi f_m}^{2\pi f_m} F_p(j\omega) e^{-j\omega\frac{n}{2f_m}} d\omega = 2f_m \cdot F_n$$

gdje je F_n prethodno određeno relacijom

$$F_n = \frac{1}{4\pi f_m}\int_{-2\pi f_m}^{2\pi f_m} F_p(j\omega) e^{-jn\frac{1}{2f_m}\omega} d\omega$$

Teorema o odabiranju (dokaz)

Iz relacije

$$f\left(-\frac{n}{2f_m}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi f_m}^{2\pi f_m}F_p(j\omega)e^{-j\omega\frac{n}{2f_m}}d\omega=2f_m\cdot F_n$$

možemo pronaći Fourierove koeficijente F_n za bilo koje n, gdje je n =. . .-3, -2, -1, 0, 1, 2, . . .,pod uslovom da znamo vrijednosti signala f(t) u odgovarajućim trenucima $t_n=-\frac{n}{2f_m}$.

Sada se izraz za funkciju $F_p(j\omega)$ može napisati kao:

$$F_p(j\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\frac{1}{2f_m}\omega}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2f_m}f\left(-\frac{n}{2f_m}\right)e^{jn\frac{1}{2f_m}\omega}$$

Teorema o odabiranju (dokaz)

Kad je poznato $F_p(j\omega)$, može se odrediti i f(t) :

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi f_m}^{2\pi f_m} F_p(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi f_m}^{2\pi f_m}\frac{1}{2f_m}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(-\frac{n}{2f_m}\right)e^{jn\frac{1}{2f_m}\omega}\right]e^{j\omega t}d\omega=$$

$$=\frac{1}{4\pi f_m}\int_{-2\pi f_m}^{2\pi f_m}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(-\frac{n}{2f_m}\right)e^{j\omega\left(t+\frac{n}{2f_m}\right)}d\omega$$

Izvođenjem ovog izraza dokazana je teorema o odabiranju. Pokazano je da je signal f(t), čiji je spektar ograničen, potpuno određen prethodnim izrazom.

U njemu je jedino potrebno poznavati vrijednosti signala f(t) u trenucima $t_n=-\frac{n}{2f_m}$, koji se nazivaju trenucima odabiranja, pa da se naznačenim operacijama odredi f(t) za bilo koje *t.*

Teorema o odabiranju (dokaz)

Prethodni izraz može da se napiše i u još jednom, pogodnijem obliku. Zamjenom redoslijeda integracije i sumiranja u prethodnom izrazu:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi f_m} f\left(-\frac{n}{2f_m}\right) \int_{-2\pi f_m}^{2\pi f_m} e^{j\omega\left(t+\frac{n}{2f_m}\right)} d\omega$$

Odnosno

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(-\frac{n}{2f_m}\right) \frac{\sin 2\pi f_m\left(t+\frac{n}{2f_m}\right)}{2\pi f_m\left(t+\frac{n}{2f_m}\right)}$$

Teorema o odabiranju (dokaz)

Prethodni izraz može da se napiše i u još jednom, pogodnijem obliku. Zamjenom redoslijeda integracije i sumiranja u prethodnom izrazu:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi f_m} f\left(-\frac{n}{2f_m}\right) \int_{-2\pi f_m}^{2\pi f_m} e^{j\omega\left(t+\frac{n}{2f_m}\right)} d\omega$$

Odnosno

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(-\frac{n}{2f_m}\right) \frac{\sin 2\pi f_m\left(t+\frac{n}{2f_m}\right)}{2\pi f_m\left(t+\frac{n}{2f_m}\right)}$$

Pošto se sumiranje vrši za sve vrijednosti *n* od $-\infty$ do ∞, to prethodni izraz može da se napiše u obliku:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n}{2f_m}\right) \frac{\sin 2\pi f_m\left(t-\frac{n}{2f_m}\right)}{2\pi f_m\left(t-\frac{n}{2f_m}\right)}$$

Teorema o odabiranju (dokaz)

Izraz

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n}{2f_m}\right)\frac{\sin 2\pi f_m\left(t-\frac{n}{2f_m}\right)}{2\pi f_m\left(t-\frac{n}{2f_m}\right)}$$

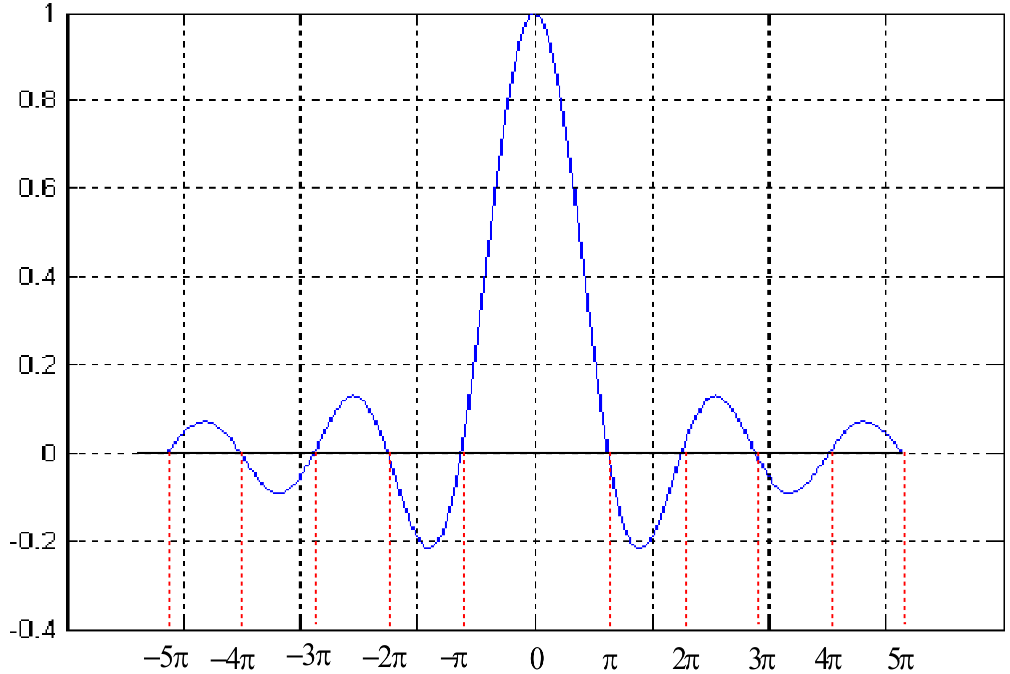
omogućava novu interpretaciju teoreme o odabiranju:

Signal *f (t)* , čiji je spektar ograničen učestanošću f_m, jednoznačno je određen beskonačnom sumom članova pri čemu je svaki od njih obrazovan od proizvoda vrijednosti signala *f(t)* u tački odabiranja t = t_n i *težinske funkcije* tipa $\frac{\sin x}{x}$ centrirane u odgovarajućem trenutku odabiranja.

- Funkcija $\frac{\sin x}{x}$ ima osobinu da je njena vrijednost za *x* = 0 jednaka 1, a za vrijednosti *x* = $k\pi$, gdje je *k* ma koji cio broj izuzev nule, ta vrijednost je jednaka nuli.

Teorema o odabiranju (dokaz)

- Funkcija $\frac{\sin x}{x}$ ima osobinu da je njena vrijednost za $x = 0$ jednaka 1, a za vrijednosti $x = k\pi$, gdje je k ma koji cio broj izuzev nule, ta vrijednost je jednaka nuli.



Težinska funkcija y=sinx/x

Teorema o odabiranju (dokaz u suprotnom smjeru)

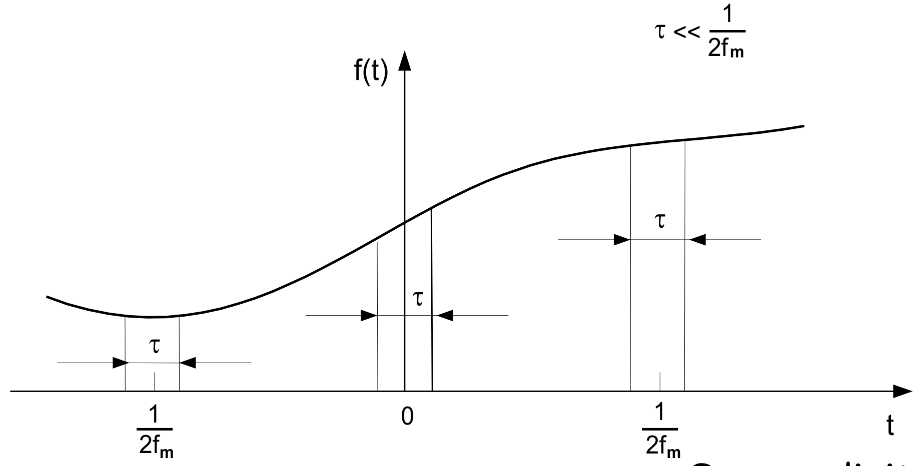
Potrebno je dokazati da se na osnovu poznatih odbiraka uvijek može rekonstruisati originalni signal *f(t)*.

Pretpostavimo da imamo kontinualni signal *f(t)*, čija je maksimalna učestanost u spektru f_m. Uzmimo njegove odbirke u trenucima

$$t_n = \frac{n}{2f_m}$$

gdje je $n = \ldots,-3,-2,-1,0,1,2,..$

Neka su odbirci predstavljeni vrlo uskim impulsima, trajanja τ što je u skladu sa mogućnošću njihove praktične realizacije.



Teorema o odabiranju (dokaz u suprotnom smjeru)

Ako je trajanje odbirka τ mnogo manje od ($1/2f_m$), onda se može pretpostaviti da se u tom kratkom intervalu vremena *f(t)* ne mijenja. Tada će Fourireova transformacija jednog ovakvog pojedinačnog impulsa biti:

$$F_{(n)}(j\omega) = \int_{\frac{n}{2f_m}-\frac{\tau}{2}}^{\frac{n}{2f_m}+\frac{\tau}{2}} f\left(\frac{n}{2f_m}\right) e^{-j\omega t} dt \cong f\left(\frac{n}{2f_m}\right) \tau e^{-j\omega \frac{n}{2f_m}}$$

Kako je Fourireova transformacija delta impulsa data sledećim izrazom:

$$\Delta(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0}$$

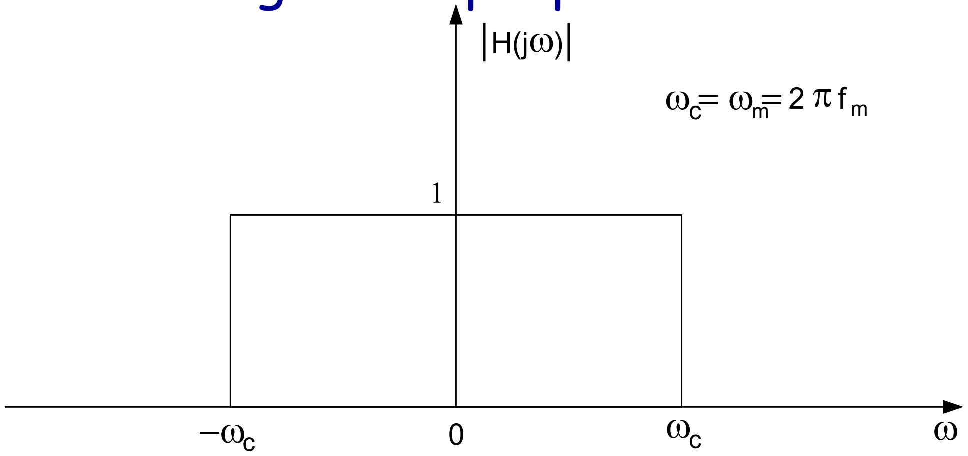
Može se zaključiti da je $F_{(n)}(j\omega)$ Fourireova transformacija delta impulsa čija je površina

$$\tau \cdot f\left(\frac{n}{2f_m}\right)$$

pri čemu je taj impuls centriran u trenutku $t_n = \dfrac{n}{2f_m}$.

Teorema o odabiranju (dokaz u suprotnom smjeru)

Ako se na ulaz idealnog filtra propusnika niskih učestanosti



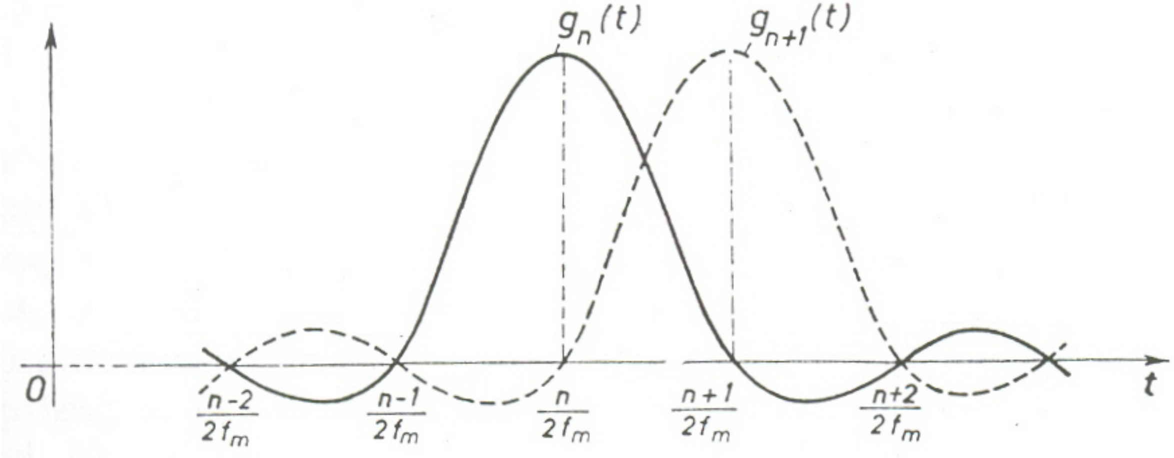
dovede signal u vidu impulsa, čija je Fourierova transformacija $F_{(n)}(j\omega)$. Tada će se za odziv na njegovom izlazu dobiti:

$$g_n(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_{(n)}(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=f\left(\frac{n}{2f_m}\right)\tau\frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi f_m}^{2\pi f_m}e^{j\omega\left(t-\frac{n}{2f_m}\right)}d\omega$$

Odnosno $g_n(t)=2f_m\tau f\left(\dfrac{n}{2f_m}\right)\dfrac{\sin 2\pi f_m\left(t-\dfrac{n}{2f_m}\right)}{2\pi f_m\left(t-\dfrac{n}{2f_m}\right)}$

Teorema o odabiranju (dokaz u suprotnom smjeru)

Dobijeni odziv filtra na pobudu u vidu izabranog *n*-tog odbirka dat je na slici:



Maksimum ove funkcije nalazi se u trenutku $t_n = \frac{n}{2f_m}$,dok u svim ostalim trenucima odabiranja funkcija $g_n(t)$ ima svoje nule.

Ako se kroz ovaj filtar propusti drugi ovakav impuls koji je lociran u trenutku $t_{n+1} = \frac{n+1}{2f_m}$, dobio bi se odziv $g_{n+1}(t)$, koji je prikazan na slici isprekidanom linijom. Ovaj odziv ima maksimum u trenutku $t_{n+1} = \frac{n+1}{2f_m}$, a u svim ostalim tačkama odabiranja ima vrijednost nula.

Teorema o odabiranju (dokaz u suprotnom smjeru)

Ako se na ulaz idealnog niskopropusnog filtra dovede niz odbiraka, umjesto samo jednog odbirka, onda se na osnovu teoreme o superpoziciji dobija odziv:

$$g(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n(t)=2f_m\tau\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n}{2f_m}\right)\frac{\sin 2\pi f_m\left(t-\dfrac{n}{2f_m}\right)}{2\pi f_m\left(t-\dfrac{n}{2f_m}\right)}=2f_m\tau f(t)$$

Na ovaj način je pokazano da je signal *f(t)* u potpunosti definisan svojim odbircima. To znači da se signal može predstaviti diskretnim skupom vrijednosti uzetih u raznim, ali tačno definisanim, trenucima vremena.

Teorema o odabiranju (zaključak)

- diskretizacija po vremenu nam omogućava da kontinualnu funkciju prikažemo kao niz odbiraka.
- Na taj način se kontinualna poruka ekvivalentira diskretnim signalom.
- Da bi korisnik dobio poruku u originalnom obliku, treba propustiti diskretizovani signal kroz filtar propusnik niskih učestanosti.

U ovome i jeste smisao dokaza teoreme u oba smjera: diskretizuje se signal, a zatim se rekonstruiše originalna poruka propuštanjem kroz niskopropusni filtar granične učestanosti $f_c = f_m$.

Pitanja za usmeni dio kolokvijuma

- Diskretizacija kontinualnih signala
- Teorema o odabiranju